LINEARE ALGEBRA

ÜBUNGSBLATT 5

Man betrachtet immer einen Körper K.

1. Sei $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$. Ist A inverierbar, so ist A^t auch und es gilt

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$$

2. Sind A und B Mengen und $f : A \to B$ eine Bijektion, so sind die symmetrische Gruppen $S(A)$ und $S(B)$ isomorph.

3. Für $n \in \mathbb{N}^*$, bezeichne man $S_n = S(\{1, \dots, n\})$, die Gruppe aller Permutationen, und mit $U_2 = \{1, -1\}$. Für jede Permutation $\sigma \in S_n$ sei

$$\operatorname{sign} \sigma = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}.$$

Man zeige:

a) U_2 eine Untergruppe det Gruppe $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ ist.
b) Für $\sigma \in S_n$, gilt es $\operatorname{sign} \sigma \in U_2$.
c) $\operatorname{sign} : S_n \to U_2$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

4. Man betrachte die Matrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(K).$$

Man zeige, dass

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

5. Man löse in $\mathbb{R}$ die folgende Gleichungssysteme:

a) $\begin{cases} 2x + y + z + t = 1 \\ x + 2y - z + 4t = 2 \\ x + 5y - 4z + 11t = \lambda \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 5y + z - 2t = 0 \\ \lambda x - 6y - 4z + 2t = 0 \\ 3x + y - 3z + 4t = 0 \\ 2x - \lambda y - 2z = 0 \end{cases}$

Diskution nach $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. Wenn wir wissen, dass der System

$$\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}$$

eindeutige Lösung hat, zeige man dass, $abc \neq 0$, und berechne dann diese Lösung.

"Babeş-Bolyai" Universität, Fakultät für Mathematik und Informatik, RO-400084, Cluj-Napoca, Rumänien

E-mail address, George Ciprian Modoi: `cmodoi@math.ubbcluj.ro`